



حسابان (۱) - پایه یازدهم رشته ریاضی

جزوه جامع فصل «جبر و معادله»

آموزش مفهومی و ساده + مثال های حل شده + آزمون تشریحی و تست های
کنکوری



پاسخ تشریحی

نکته و خطای رایج

درسنامه کامل

چطور از این جزوه استفاده کنیم؟

قراردادهای جزوه

نکته سبز

یک نتیجه مهم یا راه کوتاه که ارزش به خاطر سپردن دارد.

هشدار نارنجی

اشتباهی که در امتحان و کنکور زیاد رخ می دهد.

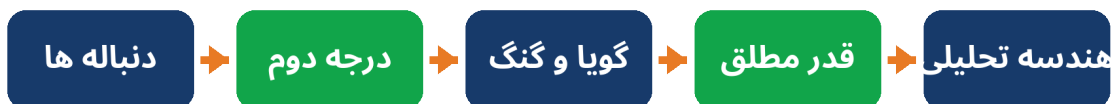
فرمول آبی

رابطه های اصلی در کادرهای آبی آمده اند.

مسیر پیشنهادی مطالعه

- ✓ ابتدا بخش «ایده اصلی» هر درس را بخوانید و فرمول را از روی منطق آن یاد بگیرید، نه از حفظ.
- ✓ مثال های حل شده را یک بار با راه حل و بار دوم بدون نگاه کردن حل کنید.
- ✓ پس از هر درس، خودآزمایی کوتاه را زمان دار پاسخ دهید.
- ✓ در پایان فصل، آزمون ۲۰ نمره ای را در ۷۵ دقیقه و تست ها را در ۲۵ دقیقه بزنید.
- ✓ هر پاسخ غلط را به یکی از سه علت «فهم مفهوم»، «محاسبه» یا «بی دقتی» نسبت دهید.

نقشه فصل



۱ مجموع دنباله های حسابی و هندسی

۲ معادلات درجه دوم و صفرهای تابع

۳ معادلات گویا و گنگ

۴ قدر مطلق، نمودار، معادله و نامعادله

۵ فاصله، شیب، خط و هندسه تحلیلی

فهرست مطالب

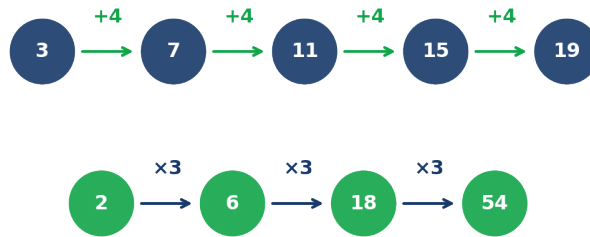
4	درس اول: مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی
8	درس دوم: معادلات درجه دوم
12	درس سوم: معادلات گویا و گنگ
16	درس چهارم: قدر مطلق و ویژگی های آن
20	درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی
24	جمع بندی و برگه فرمول
25	آزمون تشریحی استاندارد ۲۰ نمره ای
27	تست های کنکوری بازتألیف شده
29	پاسخنامه تشریحی

درباره سوال های پایانی

تیپ و سطح سوال ها پس از بررسی کتاب درسی رسمی، امتحان نهایی حسابان ۱ خرداد ۱۴۰۳ و دفترچه ریاضیات کنکور سراسری ۱۴۰۳ تنظیم شده است. سوال ها عین متن آزمون ها نیستند و با حفظ ایده، بازتألیف شده اند.

مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

درس ۱



۱. یادآوری خیلی سریع

دنباله یعنی فهرستی مرتب از عددها. در دنباله حسابی، اختلاف دو جمله پیاپی ثابت است و آن را **قدر نسبت حسابی** یا d می نامیم. در دنباله هندسی، نسبت دو جمله پیاپی ثابت است و آن را q می نامیم.

جمله عمومی دنباله حسابی

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

جمله عمومی دنباله هندسی

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

تشخیص سریع

اگر از هر جمله به جمله بعدی «یک عدد ثابت اضافه یا کم» شود، دنباله حسابی است؛ اگر «در یک عدد ثابت ضرب یا تقسیم» شود، هندسی است.

۲. مجموع دنباله حسابی؛ چرا فرمول درست است؟

فرض کنید $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. همین جمع را یک بار از آخر به اول می نویسیم. هر دو جمله متناظر برابر $a_1 + a_n$ می شود و این جفت، دقیقاً n بار تکرار می شود. پس:

$$S_n = n(a_1 + a_n)/2 = n[2a_1 + (n-1)d]/2$$

مثال ۱ - مجموع مستقیم

صورت: مجموع ۳۰ جمله اول دنباله حسابی ۵، ۸، ۱۱، ... را بیابید.

حل: داریم $a_1=5$ و $d=3$. پس $a_{30}=5+29(3)=92$. بنابراین $S_{30}=30(5+92)/2=1455$.

مثال ۲ - پیدا کردن تعداد جمله

صورت: مجموع عددهای دو رقمی مضرب ۴ را بیابید.

حل: اولین جمله ۱۲، آخرین جمله ۹۶ و قدر نسبت ۴ است. از $96=12+(n-1)4$ به $n=22$ می رسیم؛ پس $S=22(12+96)/2=1188$.

کلید مسائل کاربردی

قبل از استفاده از فرمول مجموع، سه چیز را روشن کنید: جمله اول، جمله آخر یا قدر نسبت، و تعداد جمله ها. بیشتر خطاها از اشتباه در تعداد جمله هاست.

۳. مجموع دنباله هندسی

برای $S_n=a_1+a_1q+\dots+a_1q^{n-1}$ ، طرفین را در q ضرب می کنیم و دو رابطه را از هم کم می کنیم. جمله های میانی حذف می شوند:

$$S_n = a_1(q^n-1)/(q-1) = a_1(1-q^n)/(1-q), q \neq 1$$

اگر $q=1$ باشد، همه جمله ها برابرند و به سادگی $S_n=na_1$.

مثال ۳ - هندسی

صورت: مجموع ۸ جمله اول دنباله ۳، ۶، ۱۲، ... را بیابید.

حل: $a_1=3$ ، $q=2$ ، پس $S_8=3(2^8-1)/(2-1)=765$.

مثال ۴ - یافتن تعداد جمله

صورت: در دنباله هندسی با $a_1=3$ و $q=2$ ، اگر مجموع چند جمله اول ۹۳ باشد، تعداد جمله ها چند است؟

حل: $3(2^n-1)=93$ ، پس $2^n=32$ و در نتیجه $n=5$.

۴. میانگین و جمله میانی

در یک دنباله حسابی، میانگین هر دو جمله هم فاصله برابر جمله وسط آن هاست. بنابراین اگر سه عدد a, b, c متوالی حسابی باشند، $2b=a+c$. در دنباله هندسی مثبت، برای سه جمله متوالی داریم $b^2=ac$.

مثال ۵ - سه جمله متوالی

صورت: عددهای $x-2, 2x+1, 5x-8$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند. x را بیابید.

حل: شرط وسط: $2(2x+1)=(x-2)+(5x-8)$. پس $4x+2=6x-10$ و $x=6$.

۵. کاربردها

مسافت رفت و برگشت، چیدمان صندلی ها، پس انداز دوره ای، تعداد پاره خط ها و رشد چندمرحله ای از تیپ های رایج اند. مهم این است که هر مرحله را به یک جمله دنباله تبدیل کنید.

مثال ۶ - مسئله مسافت

صورت: فاصله توپ ها از یک سبد به ترتیب ۲، ۴، ۶، ... متر است. فرد هر بار تا توپ می رود و برمی گردد. اگر ۱۲ توپ جمع کند، کل مسافت چقدر است؟

حل: مسافت هر مرحله ۴، ۸، ۱۲، ... است؛ یعنی $a_1=4, d=4, n=12$. بنابراین $S_{12}=12[8+11(4)]/2=312$ متر.

خطاهای رایج

- ✓ در فرمول هندسی، علامت صورت و مخرج را هماهنگ بنویسید؛ هر دو شکل فرمول درست است.
- ✓ اگر دنباله نزولی است، قدر نسبت حسابی منفی و قدر نسبت هندسی ممکن است بین صفر و یک باشد.
- ✓ برای شمردن جمله ها، از رابطه جمله عمومی استفاده کنید؛ با حدس شمردن نکنید.
- ✓ در مسائل رفت و برگشت، معمولاً فاصله یک مرحله دو برابر فاصله جسم تا مبدأ است.

خودآزمایی درس ۱

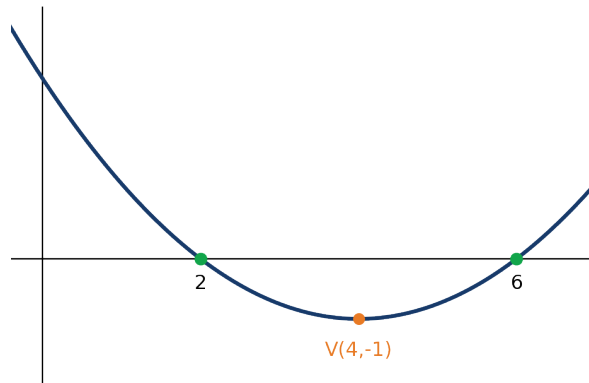
1. مجموع ۲۵ جمله اول دنباله ۷، ۱۲، ۱۷، ... را بیابید.
2. مجموع همه عددهای سه رقمی مضرب ۹ را بیابید.
3. در یک دنباله حسابی، جمله پنجم ۱۸ و جمله دوازدهم ۴۶ است. جمله اول و قدر نسبت را بیابید.
4. مجموع ۷ جمله اول دنباله هندسی ۲، ۶، ۱۸، ... را بیابید.
5. اگر سه جمله متوالی هندسی مثبت به ترتیب $2x+2$ ، $x+1$ ، $x-1$ باشند، مقدار x را بیابید.
6. در دنباله هندسی با $a_1=5$ ، $q=2$ ، اگر $S_n=155$ باشد، n را بیابید.

پاسخ سریع

(۱ | ۱۶۷۵) (۲ | ۵۵۳۵۰) (۳ | $a_1=2, d=4$) (۴ | ۲۱۸۶) (۵ | $x=3$) (۶ | ۵)

معادلات درجه دوم

درس ۲



۱. شکل کلی و روش های حل

معادله درجه دوم به صورت $ax^2+bx+c=0$ با شرط $a \neq 0$ است. روش مناسب را بر اساس ظاهر معادله انتخاب می کنیم:

تجزیه

وقتی عوامل ساده دیده می شوند.

مربع کامل

برای فهم رأس سهمی و ساختار.

فرمول کلی

روش عمومی و همیشه قابل استفاده.

$$x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / (2a), \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0$$

دو ریشه حقیقی متمایز

$$\Delta = 0$$

یک ریشه حقیقی مضاعف

$$\Delta < 0$$

ریشه حقیقی ندارد

مثال ۱ - انتخاب روش

صورت: معادله $2x^2-5x-3=0$ را حل کنید.

حل: تجزیه: $(2x+1)(x-3)=0$. پس $x=3$ یا $x=-1/2$.

۲. روابط بین ریشه ها و ضرایب (روابط ویتا)

اگر ریشه های معادله $ax^2+bx+c=0$ برابر α و β باشند:

جمع ریشه ها

$$\alpha + \beta = -b/a$$

حاصل ضرب ریشه ها

$$\alpha\beta = c/a$$

این روابط برای محاسبه عبارت های متقارن، بدون پیدا کردن تک تک ریشه ها، بسیار قدرتمندند.

مثال ۲ - عبارت متقارن

صورت: ریشه های $x^2-5x+3=0$ را α و β بنامید. مقدار $\alpha^2+\beta^2$ را بیابید.

حل: $S=5, P=3$. پس $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=25-6=19$.

جعبه ابزار ویتا

$(\alpha-\beta)^2=S^2-4P$ و $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$. این دو رابطه در تست ها بارها استفاده می شوند.

۳. تشکیل معادله از روی ریشه ها

اگر ریشه ها α, β باشند، ساده ترین معادله درجه دوم:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

مثال ۳ - ریشه های رادیکالی

صورت: معادله ای بسازید که ریشه های آن $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ باشد.

حل: جمع ریشه ها ۴ و ضرب آن ها $4-3=1$ است؛ پس $x^2-4x+1=0$.

۴. صفرهای تابع و نمودار سهمی

صفر تابع، مقداری از x است که $f(x)=0$. در نمودار، صفرها همان طول نقاط برخورد نمودار با محور x هستند. اگر ریشه های تابع درجه دوم r_1, r_2 باشند:

$$f(x)=a(x-r_1)(x-r_2)$$

محور تقارن سهمی از وسط دو ریشه می گذرد: $x_v=(r_1+r_2)/2=-b/(2a)$. علامت a جهت بازشدگی را تعیین می کند.

مثال ۴ - ساخت ضابطه از نمودار

صورت: سهمی ریشه های ۲ و ۶ دارد و از نقطه $(0,3)$ می گذرد. ضابطه و رأس را بیابید.

حل: می نویسیم $f(x)=a(x-2)(x-6)$. از $f(0)=12a=3$ داریم $a=1/4$. محور تقارن $x=4$ و $f(4)=-1$; پس رأس $(4,-1)$.

۵. تغییر ریشه ها

اگر معادله ای با ریشه های α, β داریم و ریشه های جدید مثلاً $\alpha+1, \beta+1$ هستند، ابتدا جمع و ضرب جدید را با S, P می سازیم.

مثال ۵ - انتقال ریشه ها

صورت: ریشه های $x^2-5x+3=0$ برابر α و β است. معادله ای بیابید که ریشه هایش $\alpha+1$ و $\beta+1$ باشد.

حل: جمع جدید $S'=S+2=7$ و ضرب جدید $P'=P+S+1=9$ است. پس $x^2-7x+9=0$.

۶. معادلات قابل تبدیل به درجه دوم

در معادلاتی مانند $x^4-5x^2+4=0$ با جایگذاری $t=x^2$ به معادله درجه دوم می رسیم. پس از حل برای t ، باید به متغیر اصلی برگردیم و شرط های جایگذاری را رعایت کنیم.

مثال ۶ - دو مجزوری

صورت: $x^4-5x^2+4=0$ را حل کنید.

حل: $t=x^2$ ؛ آنگاه $t^2-5t+4=0$ و $t=1,4$. پس $x=\pm 1, \pm 2$.

۷. داشتن یک ریشه از چندجمله ای

اگر r صفر چندجمله ای $P(x)$ باشد، عامل $(x-r)$ در آن وجود دارد. با تقسیم چندجمله ای، درجه کاهش می یابد.

مثال ۷ - عامل معلوم

صورت: اگر ۲ یک صفر $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ باشد، سایر صفرها را بیابید.

حل: با گروه بندی: $P=x^2(x-1)-4(x-1)=(x-1)(x^2-4)=(x-1)(x-2)(x+2)$. صفرها ۱, ۲, -۲.

۸. حل هندسی

جواب های معادله $f(x)=g(x)$ طول نقاط تقاطع دو نمودار است. این روش برای شمارش جواب یا تقریب زدن بسیار مفید است؛ اما برای پاسخ دقیق، باید در صورت امکان محاسبه جبری انجام داد.

خطاهای رایج

- ✓ در روابط ویتا علامت جمع ریشه ها منفی است: $-b/a$.
- ✓ وقتی از معادله ریشه ها می سازید، ضریب اول می تواند هر عدد ناصفر باشد؛ فرم یکه فقط ساده ترین است.
- ✓ در جایگذاری $t=x^2$ ، جواب منفی برای t قابل قبول نیست.
- ✓ صفر تابع با عرض از مبدأ فرق دارد؛ صفر تابع روی محور افقی است.

خودآزمایی درس ۲

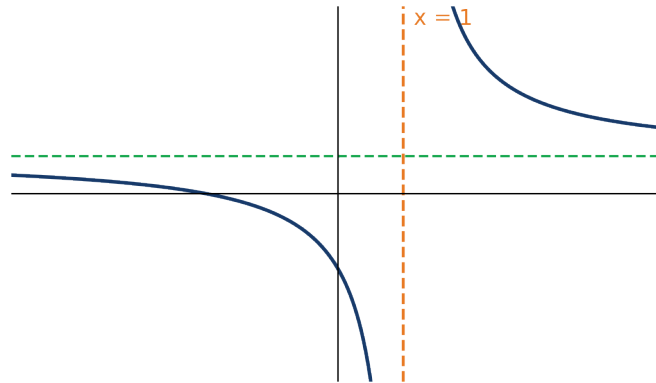
۱. معادله $3x^2-x-2=0$ را حل کنید.
۲. اگر α, β ریشه های $2x^2+3x-4=0$ باشند، $1/\alpha+1/\beta$ را بیابید.
۳. معادله ای با ریشه های $3 \pm \sqrt{5}$ بسازید.
۴. سهمی ریشه های $-1/4$ دارد و $f(0)=8$ ، ضابطه را بیابید.
۵. معادله $(x^2-2)^2-5(x^2-2)+6=0$ را حل کنید.
۶. اگر اختلاف ریشه های $x^2-2kx+5=0$ برابر ۴ باشد، k^2 را بیابید.

پاسخ سریع

(۱ | $1, -2/3$) (۲ | $-3/4$) (۳ | $x^2-6x+4=0$) (۴ | $f(x)=-2(x+1)(x-4)$) (۵ | $x=\pm 2, \pm \sqrt{5}$) (۶ | ۹)

معادلات گویا و گنگ

درس ۳



بخش اول: معادلات گویا

معادله گویا شامل کسرهای جبری است. اولین کار، نوشتن **مقادیر ممنوع** است؛ یعنی مقادیری که یکی از مخرج ها را صفر می کنند.

الگوریتم چهار مرحله ای

۱) مقادیر ممنوع را بنویس. ۲) طرفین را در ک.م.م مخرج ها ضرب کن. ۳) معادله حاصل را حل کن. ۴) جواب های ممنوع را حذف کن.

مثال ۱ - یک معادله گویا

صورت: $2/(x-1) + 1/(x+1) = 1$ را حل کنید.

حل: مقادیر ممنوع $x \neq \pm 1$. پس از ضرب در $(x-1)(x+1)$: $2(x+1) + (x-1) = x^2 - 1$. بنابراین $x^2 - 3x - 2 = 0$ و $x = (3 \pm \sqrt{17})/2$. هر دو مجازند.

مثال ۲ - جواب ظاهری ممنوع

صورت: $(x+2)/(x-2) = 4/(x-2)$ را حل کنید.

حل: شرط $x \neq 2$. ضرب در $x-2$ می دهد $x+2=4$ و جواب ظاهری $x=2$ است، اما ممنوع است؛ پس معادله جواب ندارد.

مسائل درصد و مخلوط

در مسائل غلظت، نسبت «مقدار ماده خالص / کل محلول» را می نویسیم. با افزودن یا کم کردن ماده، صورت و مخرج باید جداگانه به روز شوند.

مثال ۳ - محلول

صورت: ۲۰۰ کیلوگرم محلول ۴ درصدی داریم. چند کیلوگرم نمک خالص اضافه کنیم تا محلول ۷ درصدی شود؟

حل: نمک اولیه ۸ کیلوگرم است. اگر x کیلوگرم اضافه شود: $(8+x)/(200+x)=0.07$. حل می دهد $x=600/93 \approx 6.45$ کیلوگرم.

بخش دوم: معادلات گنگ یا رادیکالی

در معادله گنگ، متغیر زیر رادیکال است. دو خطر وجود دارد: نامعتبر بودن عبارت زیر ریشه و ایجاد **جواب اضافی** هنگام توان دو کردن.

اصل طلایی

بعد از حل معادله رادیکالی، همه جواب ها را در معادله اصلی امتحان کنید. کنترل نهایی اختیاری نیست.

یک رادیکال

مثال ۴ - یک رادیکال

صورت: $\sqrt{x+4}=x-2$ را حل کنید.

حل: چون سمت چپ نامنفی است، $x \geq 2$. با توان دو: $x+4=(x-2)^2$ ، یعنی $x^2-5x=0$. جواب های ظاهری ۰ و ۵؛ فقط ۵ شرط را دارد و در معادله اصلی درست است.

دو رادیکال

یکی از رادیکال ها را تنها کنید، توان دو کنید، سپس رادیکال باقی مانده را دوباره تنها کرده و توان دو کنید. هر مرحله می تواند جواب اضافی بسازد.

مثال ۵ - دو رادیکال

صورت: $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 5$ را حل کنید.

حل: دامنه $x \geq 5$. رادیکال دوم را جدا می کنیم: $\sqrt{x-5} = 5 - \sqrt{x}$. توان دو و ساده سازی می دهد $\sqrt{x} = 3$ ، پس $x = 9$.
کنترل: $3 + 2 = 5$.

معادله رادیکالی درجه دوم ساز

مثال ۶

صورت: $\sqrt{2x+3} = x$ را حل کنید.

حل: باید $x \geq 0$. توان دو: $x^2 - 2x - 3 = 0$ ، پس $x = 3, -1$. تنها $x = 3$ پذیرفته است.

چگونه تعداد جواب را پیش بینی کنیم؟

گاهی رسم دو تابع ساده تر است. مثلاً در $\sqrt{x+4} = x-2$ نمودار ریشه دوم صعودی و خمیده، و خط نیز صعودی است. دامنه و محل تقاطع، تعداد جواب را روشن می کند. با این حال پاسخ نهایی باید با کنترل جبری تأیید شود.

خطاهای رایج

- ✓ حذف کردن مخرج بدون نوشتن شرط ممنوع.
- ✓ توان دو کردن جمع: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ و نه $a^2 + b^2$.
- ✓ پذیرفتن جواب هایی که سمت راست معادله $\sqrt{A} = B$ را منفی می کنند.
- ✓ گرد کردن زود هنگام در مسائل درصد و از دست دادن دقت.

خودآزمایی درس ۳

1. $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2} = 1$ را حل کنید.

2. $\frac{x-1}{x+1} = 2$ را حل کنید.

3. $\sqrt{x+6} = x$ را حل کنید.

4. $\sqrt{x+1} + 1 = x$ را حل کنید.

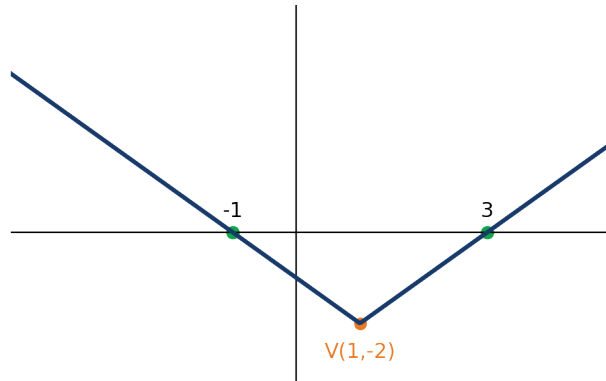
5. برای چه مقدار a ، عدد ۳ جواب معادله $\sqrt{x+a} = x$ است؟

6. اگر $x \geq 1$ باشد، $\sqrt{x-1} = 3-x$ را حل کنید.

پاسخ سریع

۱) $x = 1 \pm \sqrt{13}$ | ۲) $x = -3$ | ۳) 3 | ۴) 3 | ۵) 6 | ۶) 2

قدر مطلق و ویژگی های آن



۱. معنی واقعی قدر مطلق: فاصله

$|x|$ فاصله عدد x تا صفر است؛ پس هرگز منفی نیست. به طور کلی $|x-a|$ فاصله x تا a است.

$$|x| = x \ (x \geq 0) ; |x| = -x \ (x < 0)$$

فاصله دقیق

$$|x-a|=r \Leftrightarrow x=a \pm r$$

داخل بازه

$$|x-a|<r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$$

داخل یا روی مرز

$$|x-a| \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$$

بیرون بازه

$$|x-a|>r \Leftrightarrow x < a-r \text{ or } x > a+r$$

۲. ویژگی های مهم

$$|ab|=|a||b| \quad \checkmark$$

$$|a/b|=|a|/|b| \ (b \neq 0) \quad \checkmark$$

$$|a|^2=a^2 \quad \checkmark$$

$$\sqrt{a^2}=|a| \quad \checkmark$$

$$|a+b| \leq |a|+|b| \quad \checkmark$$

اشتباه مشهور

$|a+b|=|a|+|b|$ در حالت کلی درست نیست. فقط نامساوی مثلثی داریم: $|a+b| \leq |a|+|b|$.

۳. نوشتن تابع بدون قدر مطلق

نقطه یا نقاطی را پیدا کنید که عبارت داخل قدر مطلق صفر می شود؛ سپس محور را به بازه ها تقسیم و علامت عبارت را تعیین کنید.

مثال ۱ - ضابطه چندتکه

صورت: $f(x)=|x-1|-2$ را بدون قدر مطلق بنویسید و صفرهای آن را بیابید.

حل: اگر $x \geq 1$ ، آنگاه $f(x)=x-3$ ؛ اگر $x < 1$ ، $f(x)=-x-1$. صفرها از دو شاخه: $x=3$ و $x=-1$.

۴. انتقال نمودار

نمودار $y=|x-h|+k$ یک V با رأس (h,k) است. ضریب مثبت بیرون قدر مطلق، نمودار را عمودی کشیده و ضریب منفی آن را نسبت به محور افقی قرینه می کند.

۵. معادلات قدر مطلق

حالت استاندارد

$$|A(x)|=k \Rightarrow A(x)=k \text{ or } A(x)=-k, k \geq 0$$

مثال ۲

صورت: $|2x-3|=5$ را حل کنید.

حل: $2x-3=5$ یا $2x-3=-5$. پس $x=4$ ، $x=-1$.

دو قدر مطلق

$$|A(x)|=|B(x)| \Leftrightarrow A(x)=B(x) \text{ or } A(x)=-B(x)$$

سمت راست متغیر

در $|A(x)|=B(x)$ ابتدا شرط $B(x) \geq 0$ را بنویسید. سپس می توان از مربع کردن یا حالت بندی استفاده کرد.

مثال ۳ - سه جواب

صورت: $|x-2|=(x-2)^2$ را حل کنید.

حل: بگذارید $t=|x-2| \geq 0$. چون $(x-2)^2=t^2$, داریم $t=t^2$, پس $t=0,1$. در نتیجه $x=2$ یا $|x-2|=1$ و جواب ها 1,2,3.

۶. نامعادلات قدر مطلق

مثال ۴

صورت: $|2x-3| \leq 5$ را حل کنید.

حل: $-5 \leq 2x-3 \leq 5$, پس $-1 \leq x \leq 4$.

مثال ۵

صورت: $|x+1| > 3$ را حل کنید.

حل: $x+1 > 3$ یا $x+1 < -3$. بنابراین $x > 2$ یا $x < -4$.

۷. روش جدول علامت برای چند قدر مطلق

در عبارتی مثل $|x-1|+|x+2|=5$ نقاط شکست 1,2- هستند. محور را به سه بازه تقسیم و در هر بازه قدر مطلق ها را باز کنید.

مثال ۶

صورت: $|x-1|+|x+1|=4$ را حل کنید.

حل: برای $x \geq 1$: $2x=4 \Rightarrow x=2$. برای $-1 \leq x < 1$: جمع برابر ۲ و جواب ندارد. برای $x < -1$: $-2x=4 \Rightarrow x=-2$.

خطاهای رایج

✓ فراموش کردن شرط $k \geq 0$ در $|A|=k$.

- ✓ باز کردن قدر مطلق بدون تعیین علامت عبارت داخل آن.
- ✓ اشتباه گرفتن «کمتر از» با داخل بازه و «بیشتر از» با بیرون بازه.
- ✓ جایگزین کردن a به جای $|a|$.

خودآزمایی درس ۴

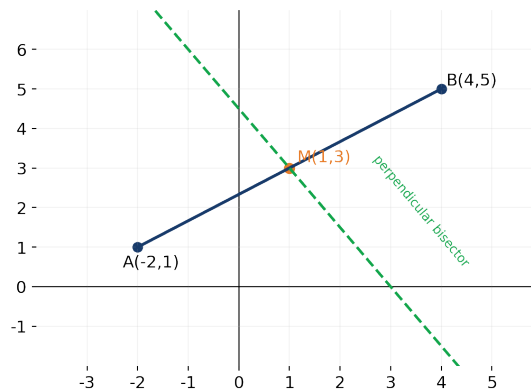
1. $|3x+1|=7$ را حل کنید.
2. $|x-4|<3$ را حل کنید.
3. $|2x-1|\geq 5$ را حل کنید.
4. ضابطه چندتکه $|x+2|-1$ را بنویسید.
5. $|x-3|=|2x+1|$ را حل کنید.
6. $|x|+|x-2|=4$ را حل کنید.

پاسخ سریع

۱) $x=2, -8/3$ | ۲) $1< x < 7$ | ۳) $x \leq -2$ or $x \geq 3$ | ۴) برای $x \geq -2$: $x+1$ و برای $x < -2$: $-x-3$ | ۵) $x=2/3, -4$ | ۶) $x=-1, 3$

آشنایی با هندسه تحلیلی

درس ۵



۱. فاصله روی محور و در صفحه

روی محور، فاصله دو عدد x_1, x_2 برابر $|x_2 - x_1|$ است. در صفحه، با قضیه فیثاغورس:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال ۱ - فاصله دو نقطه

صورت: فاصله $A(-2, 1)$ و $B(4, 5)$ را بیابید.

حل: $AB = \sqrt{(6^2 + 4^2)} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

۲. نقطه وسط

$$M((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$$

۳. شیب خط

$$m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1), x_2 \neq x_1$$

خطوط موازی

$$m_1 = m_2$$

خطوط عمود، در حالت شیب دار

$$m_1 m_2 = -1$$

خط افقی شیب صفر دارد و خط عمودی شیب تعریف نشده. پس برای خط های عمودی، از شرط ضرب شیب ها استفاده نکنید.

۴. معادله خط

نقطه - شیب

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

شیب - عرض از مبدأ

$$y = mx + b$$

فرم عمومی $ax + by + c = 0$ برای فرمول فاصله بسیار مناسب است.

مثال ۲ - خط از دو نقطه

صورت: معادله خط گذرنده از $A(-2,1)$ و $B(4,5)$ را بیابید.

حل: شیب $m = 4/6 = 2/3$. پس $y - 1 = (2/3)(x + 2)$ و فرم عمومی $2x - 3y + 7 = 0$.

۵. عمودمنصف پاره خط

عمودمنصف از نقطه وسط می گذرد و بر پاره خط عمود است. روش دوم، استفاده از شرط هم فاصله بودن $PA = PB$ است.

مثال ۳ - عمودمنصف

صورت: عمودمنصف پاره خط بین $A(-2,1)$ و $B(4,5)$ را بیابید.

حل: نقطه وسط $M(1,3)$ و شیب AB برابر $2/3$ است؛ پس شیب عمود $-3/2$. معادله: $y - 3 = -3/2(x - 1)$ یا $3x + 2y - 9 = 0$.

۶. فاصله نقطه از خط

$$d = |ax_0 + by_0 + c| / \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال ۴

صورت: فاصله $A(-2,4)$ از خط $4x-3y+12=0$ را بیابید.

حل: $d = |-8-12+12|/5 = 8/5$.

۷. فاصله دو خط موازی

ابتدا ضرایب x, y را دقیقاً یکسان کنید. برای دو خط $ax+by+c_1=0$ و $ax+by+c_2=0$:

$$d = |c_1 - c_2| / \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال ۵

صورت: فاصله دو خط $3x-4y+5=0$ و $3x-4y-10=0$ را بیابید.

حل: $d = |5 - (-10)|/5 = 3$.

۸. کاربرد در مثلث

با فرمول فاصله می توان نوع مثلث را تشخیص داد. برای قائم بودن، مربع طول بزرگ ترین ضلع باید برابر مجموع مربع دو ضلع دیگر باشد. با نقطه وسط، میانه و با فاصله نقطه از خط، ارتفاع محاسبه می شود.

مثال ۶ - تشخیص قائم بودن

صورت: نشان دهید نقاط $A(0,0)$ ، $B(4,0)$ و $C(4,3)$ یک مثلث قائم می سازند.

حل: $AB=4$ ، $BC=3$ ، $AC=5$ و $3^2+4^2=5^2$. زاویه B قائم است.

۹. پارامتر در فاصله

مثال ۷

صورت: فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. k را بیابید.

حل: فرم عمومی $8x + 6y - k = 0$. پس $|8 - 24 - k|/10 = 4$ و $|k + 16| = 40$. بنابراین $k = 24$ یا $k = -56$.

خطاهای رایج

- ✓ در فرمول فاصله، کل عبارت صورت داخل قدر مطلق است.
- ✓ قبل از استفاده از فاصله دو خط، ضرایب x و y را یکسان کنید.
- ✓ شیب خط عمودی تعریف نشده، نه بی نهایت.
- ✓ مختصات نقطه وسط، میانگین جداگانه طول ها و عرض هاست.

خودآزمایی درس ۵

۱. فاصله نقاط $A(-1, 2)$ و $B(5, -6)$ را بیابید.
۲. نقطه وسط پاره خط بین $(3, -2)$ و $(-5, 8)$ را بیابید.
۳. معادله خطی با شیب ۳ که از $(2, -1)$ می گذرد بنویسید.
۴. معادله خط عمود بر $2x - 3y + 1 = 0$ و گذرنده از مبدأ را بیابید.
۵. فاصله $(2, 1)$ از خط $x - 2y + 4 = 0$ را بیابید.
۶. فاصله خطوط $2x + y - 3 = 0$ و $4x + 2y + 8 = 0$ را بیابید.

پاسخ سریع

(۱ | ۱۰ | ۲ | $(-1, 3)$ | ۳ | $y = 3x - 7$ | ۴ | $3x + 2y = 0$ | ۵ | $4/\sqrt{5}$ | ۶ | $7/\sqrt{5}$)

جمع بندی فصل و برگه فرمول

دنباله حسابی

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = n(a_1 + a_n)/2$$

دنباله هندسی

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1)$$

درجه دوم

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$S = -b/a, P = c/a$$

قدر مطلق

$$|x-a| < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$$

$$|x-a| > r \Leftrightarrow x < a-r \text{ or } x > a+r$$

فاصله دو نقطه

$$\sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$$

نقطه وسط

$$((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$$

شیب

$$m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$$

$$m_1 m_2 = -1$$

فاصله نقطه از خط

$$|ax_0 + by_0 + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$$

درخت تصمیم حل سوال

دنباله: آیا اختلاف ثابت است یا نسبت؟ سپس جمله عمومی، تعداد جمله و فرمول مجموع.

درجه دوم: تجزیه می شود؟ اگر نه، دلتا. اگر فقط جمع و ضرب لازم است، ویتا.

گویا: شرط مخرج، حذف مخرج، حل، کنترل.

گنگ: دامنه و نامنفی بودن، تنها کردن رادیکال، توان دو، کنترل.

قدر مطلق: فاصله، دو حالت، یا تقسیم محور به بازه های علامتی.

هندسه تحلیلی: شکل کوچک بکشید، داده ها را مختصاتی کنید، فرمول مناسب را انتخاب کنید.

چک نهایی امتحان

آیا شرط دامنه را نوشته ام؟ آیا جواب اضافی یا ممنوع را حذف کرده ام؟ آیا واحد پاسخ را نوشته ام؟ آیا علامت منفی و قدر مطلق را دوباره کنترل کرده ام؟

آزمون تشریحی استاندارد فصل

زمان: ۷۵ دقیقه

نمره: ۲۰

ماشین حساب: غیرمجاز

راهنما

سوال ها با الگوی کتاب درسی و امتحان نهایی تنظیم شده اند. پاسخ ها را مرحله به مرحله بنویسید؛ در معادلات گویا و گنگ، شرط ها نمره دارند.

1. (۱ نمره) درستی یا نادرستی عبارت ها را مشخص کنید:
الف) جمله دهم دنباله حسابی ۵، ۸، ۱۱، ... برابر ۳۲ است. (ب) مجموع تعداد زوجی از جمله های دنباله هندسی با قدر نسبت ۱- همیشه صفر است. (پ) معادله $x^2+4x+5=0$ دو ریشه حقیقی دارد. (ت) معادله $|x-2|=3$ دقیقاً یک جواب دارد.
2. (۱ نمره) جاهای خالی را کامل کنید: الف) $1+2+\dots+n=\dots$ (ب) جمع ریشه های $ax^2+bx+c=0$ برابر ... است. (پ) در معادله گویا، صفرهای مخرج ... هستند. (ت) فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax+by+c=0$ برابر ... است.
3. (۱/۲۵ نمره) مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۶ را بیابید.
4. (۱/۵ نمره) سهمی ریشه های ۲ و ۶ دارد و از نقطه $(0,3)$ می گذرد. ضابطه تابع و مختصات رأس را بیابید.
5. (۱ نمره) معادله $\sqrt{x+4}=x-2$ را حل کنید.
6. (۱/۲۵ نمره) معادله $2/(x-1)+1/(x+1)=1$ را حل کنید.
7. (۱ نمره) نامعادله $|2x-3|\leq 5$ را حل و روی محور نمایش دهید.
8. (۰/۷۵ نمره) فاصله نقطه $A(-2,4)$ از خط $4x-3y+12=0$ را بیابید.
9. (۱/۲۵ نمره) نقطه وسط و معادله عمودمنصف پاره خط بین $A(-2,1)$ و $B(4,5)$ را بیابید.
10. (۱ نمره) در دنباله هندسی با $a_1=3, q=2$ اگر $S_n=93$ باشد، n را بیابید.

11. (۱ نمره) اگر α, β ریشه های $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند، معادله ای بنویسید که ریشه های آن $\alpha + 1, \beta + 1$ باشند.

12. (۱ نمره) معادله $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ را حل کنید.

13. (۱ نمره) محیط یک مستطیل ۳۰ و مساحت آن ۵۶ است. طول و عرض را بیابید.

14. (۱ نمره) تعداد و مقدار جواب های $|x-2| = (x-2)^2$ را بیابید.

15. (۰/۷۵ نمره) فاصله دو خط $3x - 4y + 5 = 0$ و $3x - 4y - 10 = 0$ را بیابید.

16. (۱/۲۵ نمره) در یک دنباله حسابی، جمله پنجم ۱۸ و جمله دوازدهم ۴۶ است. a_1, d, S_{20} را بیابید.

17. (۱ نمره) معادله $\sqrt{2x+3} = x$ را حل کنید.

18. (۱ نمره) تابع $f(x) = |x+2| - 1$ را بدون قدر مطلق بنویسید و صفراهایش را بیابید.

19. (۱ نمره) فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. مقادیر k را بیابید.

تست های کنکوری بازتألیف شده

شیوه طراحی

تیپ سوال ها از الگوهای واقعی دنباله، ریشه های تابع درجه دوم، اختلاف ریشه ها، معادلات رادیکالی و هندسه تحلیلی کنکور ریاضی الهام گرفته شده است؛ اعداد و بیان سوال ها بازتألیف شده اند.

1. سه جمله متوالی $a-4$, $2a+1$, $4a-5$ یک دنباله حسابی اند. جمله دهم کدام است؟

(۱) ۱۳۵ (۲) ۱۴۳ (۳) ۱۵۱ (۴) ۱۵۹

2. نقاط $(-1, -4)$ و $(3, -4)$ دو نقطه برخورد خط $y = -4$ با نمودار تابع درجه دوم f هستند. اگر این دو طول، صفرهای تابع منتقل شده $g(x) = f(x) + 4$ باشند، مجموع صفرهای g کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۴

3. اختلاف ریشه های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $4/3$ است. مقدار $[k^2/3]$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

4. خطی محورهای مختصات را در $(8, 0)$ و $(0, 6)$ قطع می کند. فاصله نقطه وسط پاره خط بین این دو نقطه تا مبدأ چند است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

5. جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 5$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

6. اگر $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 255$ ، مقدار n کدام است؟

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

7. اگر α, β ریشه های $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند، مقدار $(\alpha+1)(\beta+1)$ کدام است؟

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

8. معادله $1/(x-1)+1/(x+1)=1$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

9. مجموع جواب های $|x-1|+|x+1|=4$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

10. معادله $|x-2|=(x-2)^2$ چند جواب دارد؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

11. فاصله دو خط $6x-8y+1=0$ و $3x-4y-7=0$ کدام است؟

(۱) $3/2$ (۲) ۲ (۳) $5/2$ (۴) ۳

12. عمودمنصف پاره خط بین $(0,2)$ و $(4,4)$ از کدام نقطه می گذرد؟

(۱) $(1,3)$ (۲) $(2,3)$ (۳) $(3,2)$ (۴) $(2,4)$

13. مجموع مربع های ریشه های $x^4-5x^2+4=0$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

14. در دنباله هندسی $a_1=81, q=1/3$ ، مجموع ۵ جمله اول کدام است؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۱ (۳) ۱۲۲ (۴) ۱۲۳

15. فاصله نقطه $(1,-4)$ از خط $8x+6y=k$ برابر ۴ است. مجموع مقادیر ممکن k کدام است؟

(۱) -۳۲ (۲) -۱۶ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

کلید: ۱(۱۵)، ۲(۱۴)، ۳(۱۳)، ۲(۱۲)، ۱(۱۱)، ۳(۱۰)، ۲(۹)، ۳(۸)، ۳(۷)، ۲(۶)، ۳(۵)، ۲(۴)، ۲(۳)، ۳(۲)، ۳(۱)

پاسخنامه تشریحی آزمون ۲۰ نمره ای

1. الف درست؛ $a_{10}=5+9\times 3=32$. ب درست؛ جمله ها دو به دو خنثی می شوند. پ نادرست؛ $\Delta=16-20<0$. ت نادرست؛ دو جواب $-1,5$ دارد.
2. الف $n(n+1)/2$ ؛ ب $-b/a$ ؛ پ مقادیر ممنوع؛ ت $|ax_0+by_0+c|/\sqrt{a^2+b^2}$.
3. دنباله ۱۲، ۱۸، ...، ۹۶ با $d=6$ و $n=15$. $S=15(12+96)/2=810$
4. $f=a(x-2)(x-6)$ از $f(0)=3$ ، $12a=3\Rightarrow a=1/4$. محور تقارن $x=4$ و $f(4)=-1$. رأس $(4,-1)$.
5. شرط $x\geq 2$. توان دو: $x+4=x^2-4x+4\Rightarrow x(x-5)=0$. فقط $x=5$.
6. $x\neq \pm 1$. پس $2(x+1)+(x-1)=x^2-1\Rightarrow x^2-3x-2=0$. جواب ها $(3\pm\sqrt{17})/2$ و هر دو مجاز.
7. $-5\leq 2x-3\leq 5\Rightarrow -1\leq x\leq 4$.
8. $d=|-8-12+12|/5=8/5$.
9. $M(1,3)$. شیب AB برابر $2/3$ ، شیب عمود $-3/2$. معادله $3x+2y-9=0$.
10. $3(2^n-1)=93\Rightarrow 2^n=32\Rightarrow n=5$.
11. جمع جدید 7 و ضرب جدید $3+5+1=9$. معادله $x^2-7x+9=0$.
12. $t=x^2$: $(t-1)(t-4)=0$. پس $x=\pm 1, \pm 2$.
13. نیم محیط ۱۵ است. اگر اضلاع x, y ، $x+y=15, xy=56$. معادله $t^2-15t+56=0$ و اضلاع ۷ و ۸.
14. $t=|x-2|$: $t=t^2\Rightarrow t=0,1$. پس $x=1,2,3$ ؛ سه جواب.
15. $d=|5-(-10)|/5=3$.
16. $S_{20}=20[4+19\times 4]/2=800$. $a_1=18-16=2$. $a_{12}-a_5=7d=28\Rightarrow d=4$.
17. شرط $x\geq 0$. $2x+3=x^2\Rightarrow (x-3)(x+1)=0$. فقط $x=3$.
18. برای $x\geq -2$: $f=x+1$ ؛ برای $x<-2$: $f=-x-3$. صفرها $-1, -3$.
19. $|8-24-k|/10=4\Rightarrow |k+16|=40$. پس $k=24, -56$.

راه حل تست ها

1. $2(2a+1)=(a-4)+(4a-5) \Rightarrow a=11$ دنباله ۷، ۲۳، ۳۹، ... با $d=16$; $a_{10}=151$.
2. صفرهای تابع منتقل شده طول نقاط ۳ و ۱- هستند؛ مجموع ۲.
3. $(\alpha-\beta)^2=S^2-4P=4k^2-20=16/9$ پس $k^2=49/9$ و $\lfloor 49/27 \rfloor=1$.
4. نقطه وسط $(4,3)$ و فاصله تا مبدأ ۵.
5. دامنه $x \geq 5$. کنترل مستقیم یا دو بار توان دو کردن، $x=9$.
6. $2^n-1=255 \Rightarrow 2^n=256 \Rightarrow n=8$.
7. $(\alpha+1)(\beta+1)=P+S+1=3+5+1=9$.
8. پس از حذف مخرج: $2x=x^2-1 \Rightarrow x^2-2x-1=0$; دو جواب مجاز.
9. جواب ها $x=\pm 2$ و مجموع صفر.
10. مانند سوال ۱۴ آزمون، سه جواب.
11. خط دوم را در ۲ ضرب می کنیم: $6x-8y-14=0$. فاصله $|1-(-14)|/10=3/2$.
12. هر عمودمنصف از نقطه وسط می گذرد؛ نقطه وسط $(2,3)$.
13. ریشه ها $\pm 1, \pm 2$. مجموع مربع ها $1+1+4+4=10$.
14. $S_5=81(1-(1/3)^5)/(1-1/3)=121$.
15. دو مقدار ۲۴ و -۵۶؛ مجموع -۳۲.

منابع و یادداشت تألیف

این جزوه یک اثر آموزشی بازتألیف شده است و متن کتاب درسی یا آزمون ها را بازنشر نمی کند. برای تعیین سرفصل، سطح و تیپ سوال از منابع زیر استفاده شده است:

- کتاب رسمی «حسابان (۱) پایه یازدهم رشته ریاضی و فیزیک»، کد ۱۱۱۲۱۴، چاپ هشتم ۱۴۰۳، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی.
- سوالات و راهنمای تصحیح آزمون نهایی حسابان (۱) پایه یازدهم، خرداد ۱۴۰۳، مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش.
- دفترچه ریاضیات آزمون سراسری گروه علوم ریاضی و فنی، نوبت اول ۱۴۰۳، منتشرشده توسط سازمان سنجش.
- بانک نمونه سوالات امتحانی حسابان یازدهم کانون فرهنگی آموزش، برای بررسی تنوع قالب های مدرسه ای.

حقوق آموزشی

تمام مثال ها، تمرین ها، توضیح ها و پاسخ های این جزوه با بیان مستقل نوشته شده اند. سوال های پایانی از نظر ایده و سطح به آزمون های واقعی نزدیک اند، اما عین متن آن ها نیستند.



پایان فصل - موفق باشید