

آموزش دایره مثلثاتی

مناسب دانش آموزان دهم تا دوازدهم متوسطه دوم

این جزوه طوری طراحی شده که هم مفهوم دایره مثلثاتی را ساده و مرحله به مرحله یاد بگیری، هم چند سؤال امتحانی و تستی را با روش حل کوتاه و کاربردی ببینی. هدف این است که مطلب کامل باشد، اما آن قدر فشرده و ترسناک نشود که رغبت مطالعه را از بین ببرد.



تیم مهندس امیر محمودزاده

سؤال تشریحی

نکات حفظی و فوت کوزه‌گری

مرور مفهومی

جمع‌بندی سریع

سؤال کنکوری

این جزوه برای چه کسانی مناسب است؟

- اگر در مثلثات پایه کمی ضعف داری و می‌خواهی از صفر تا خوب یاد بگیری.
- اگر قبل از امتحان یا آزمون به یک مرور جمع‌وجور و مطمئن نیاز داری.
- اگر می‌خواهی تفاوت «فهمیدن» با «حفظ کردن» را در دایره مثلثاتی حس کنی.

پیش‌نیازهای خیلی کوتاه

- آشنایی با محورهای مختصات
- اعداد مثبت و منفی
- نسبت‌های سینوس، کسینوس و تانژانت در مثلث قائم‌الزاویه
- زاویه‌ها و واحد درجه (دانستن رادیان امتیاز اضافه است)

نقشه راه مطالعه این جزوه

۱) اول مفهوم و شکل دایره را یاد بگیر.

۲) بعد علامت‌ها و زاویه‌های معروف را مسلط شو.

۳) در آخر با سؤال تشریحی و تستی خودت را بسنج.

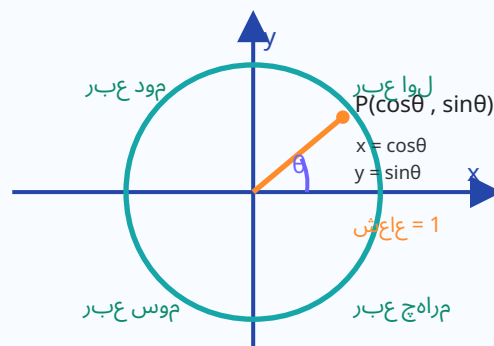
(۱) دایره مثلثاتی چیست؟

دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع ۱ است که مرکز آن روی مبدأ مختصات قرار دارد. هر زاویه θ یک نقطه روی این دایره می‌سازد. اگر مختصات آن نقطه را (x, y) بگیریم، آن‌گاه:

$$\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta \quad y = \sin \theta \quad x = \cos \theta$$

یعنی کسینوس همان مؤلفه افقی و سینوس همان مؤلفه عمودی نقطه است. این نگاه مختصاتی، کل دایره مثلثاتی را ساده می‌کند.

فوت کوزه‌گری: هر وقت گیج شدی، به جای حفظ کردن، نقطه را روی دایره تصور کن: «افقی = کسینوس» و «عمودی = سینوس».



جهت اندازه‌گیری زاویه‌ها

- اگر از محور X مثبت در جهت پادساعتگرد حرکت کنیم، زاویه مثبت است.
- اگر در جهت ساعتگرد حرکت کنیم، زاویه منفی است.
- زاویه‌های هم‌نهشت، مکان یکسانی روی دایره دارند؛ مثل 30° و 390° .

اگر رادیان هم دیدی، نترس!

- $180^\circ = \pi \text{ rad}$
- $90^\circ = \pi/2$
- $360^\circ = 2\pi$

در مدرسه و کنکور، تبدیل‌های معروف بالا کافی‌اند و لازم نیست در شروع وارد جزئیات سخت شوی.

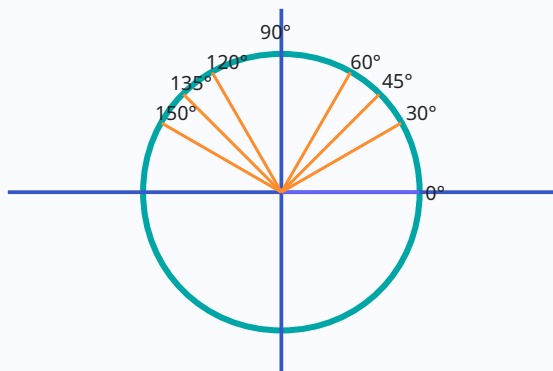
جزوه آموزش دایره مثلثاتی

۲) زاویه‌های مهمی که باید بلد باشی

زاویه‌های پایه

زاویه	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	1/2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	1	0	تعریف نشده

کافی است این پنج سطر را خوب بفهمی؛ بقیه زاویه‌های معروف از همین‌ها و با توجه به ربع‌ها ساخته می‌شوند.



علامت‌های نسبت‌ها در ربع‌ها

- ربع اول: همه مثبت‌اند.
- ربع دوم: فقط سینوس مثبت است.
- ربع سوم: فقط تانژانت مثبت است.
- ربع چهارم: فقط کسینوس مثبت است.

رمز سریع: «همه، سینوس، تانژانت، کسینوس»

زاویه مرجع چیست؟

زاویه مرجع، کوچک‌ترین زاویه مثبت بین ضلع انتهایی زاویه و محور X است. در بسیاری از سؤال‌ها، اول زاویه مرجع را پیدا می‌کنی، سپس فقط علامت را از ربع درست می‌گیری.

• 150° → زاویه مرجع 30°

• 225° → زاویه مرجع 45°

• 330° → زاویه مرجع 30°

جزوه آموزش دایره مثلثاتی

۳) نمونه سؤال تشریحی با پاسخ کوتاه و روشن

سؤال امتحانی ۱

مختصات نقطه متناظر با زاویه 150° را روی دایره مثلثاتی به دست آورید.

حل: زاویه مرجع 30° است و 150° در ربع دوم قرار دارد؛ پس سینوس مثبت و کسینوس منفی است. بنابراین:

$$\cos 150^\circ = -\sqrt{3}/2 \quad \text{و} \quad \sin 150^\circ = 1/2$$

پاسخ: $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$

سؤال امتحانی ۲

اگر $\sin \theta = 3/5$ و زاویه در ربع دوم باشد، $\cos \theta$ و $\tan \theta$ را بیابید.

حل: از رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ داریم: $\cos^2 \theta = 1 - 9/25 = 16/25$ پس $|\cos \theta| = 4/5$. چون زاویه در

ربع دوم است، کسینوس منفی می‌شود: $\cos \theta = -4/5$. سپس: $\tan \theta = (3/5) / (-4/5) = -3/4$.

سؤال امتحانی ۳

معادله $\sin x = 1/2$ را در بازه $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ حل کنید.

حل: سینوس 30° برابر $1/2$ است. چون سینوس در ربع‌های اول و دوم مثبت است، پاسخ‌ها: $x = 30^\circ$ و

$$x = 150^\circ$$

نکته: اول زاویه مرجع را پیدا کن، بعد ربع‌های مجاز را تعیین کن.

۴) چند نمونه دیگر برای جافتادن مطلب

سؤال امتحانی ۴

مقدار $\cos 240^\circ$ را به دست آورید.

حل: زاویه مرجع 60° است و 240° در ربع سوم قرار دارد. در ربع سوم کسینوس منفی است، پس:
 $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2$

سؤال امتحانی ۵

اگر $\tan \theta < 0$ و $\cos \theta < 0$ باشد، θ در کدام ربع قرار دارد؟

حل: منفی بودن تانژانت یعنی زاویه در ربع دوم یا چهارم است. منفی بودن کسینوس یعنی زاویه در ربع دوم یا سوم است. اشتراک این دو حالت فقط ربع دوم است.

سؤال امتحانی ۶

معادله $\cos x = -\sqrt{2}/2$ را در بازه $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ حل کنید.

حل: زاویه مرجع 45° است. کسینوس در ربع‌های دوم و سوم منفی می‌شود، پس: $x = 135^\circ$ و $x = 225^\circ$.

فوت کوزه‌گری این صفحه

- بیشتر خطاها از اشتباه در تشخیص ربع می‌آیند، نه از حفظ‌نبودن جدول.
- اگر نسبت مثلثاتی معلوم شد، با رابطه معروف بقیه را پیدا کن.
- در معادله‌های ساده، ترتیب حل تقریباً همیشه این است: زاویه مرجع $\rightarrow$ ربع مجاز $\rightarrow$ پاسخ نهایی.

جزوه آموزش دایره مثلثاتی

(۵) چند تست کوتاه اما مهم

تست ۱

مقدار $\sin 330^\circ$ کدام است؟

زاویه مرجع 30° و ربع چهارم است؛ سینوس در ربع چهارم منفی است. پس $\sin 330^\circ = -1/2$.

تست ۲

اگر $\theta = -45^\circ$ باشد، مختصات نقطه متناظر روی دایره چیست؟

زاویه -45° در ربع چهارم است؛ بنابراین $(\cos \theta, \sin \theta) = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

تست ۳

کدام زاویه با 60° هم‌نهشت است؟

هر زاویه‌ای از فرم $60^\circ + 360^\circ k$ مثلاً 420° یا -300° .
نکته تستی: اگر اختلاف دو زاویه مضربی از 360° باشد، هم‌نهشت‌اند.

تست ۴

اگر $\sin \theta > 0$ و $\tan \theta < 0$ باشد، θ در کدام ربع است؟

سینوس مثبت $\Rightarrow$ ربع اول یا دوم. تانژانت منفی $\Rightarrow$ ربع دوم یا چهارم. اشتراک $\Rightarrow$ ربع دوم.

جزوه آموزش دایره مثلثاتی

۶) مهم‌ترین فوت‌های کوزه‌گری دایره مثلثاتی

۵ فوت کوزه‌گری

1. همیشه اول زاویه مرجع را پیدا کن؛ بعد سراغ علامت برو.
2. مختصات نقطه را فراموش نکن: $(\cos\theta, \sin\theta)$.
3. برای نسبت‌ها، فقط ۰، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۹۰ را کاملاً مسلط باش.
4. اگر سؤال شلوغ شد، آن را به دو سؤال کوچک‌تر تبدیل کن: «قدر مطلق؟» و «علامت؟»
5. معادله‌های مثلثاتی ساده را با روش ثابت حل کن: زاویه مرجع، ربع‌ها، پاسخ نهایی.

۵ اشتباه رایج

1. جابه‌جا گرفتن جای سینوس و کسینوس
2. فراموش کردن منفی بودن نسبت در بعضی ربع‌ها
3. اشتباه در تشخیص زاویه مرجع
4. حل کردن معادله فقط در یک ربع
5. نادیده گرفتن زاویه‌های منفی یا بزرگ‌تر از 360 درجه

چطور این مبحث را بخوانیم که ماندگار شود؟

- مرحله ۱: یک بار شکل دایره را بکش و خودت چهار ربع را نام‌گذاری کن.
- مرحله ۲: جدول زاویه‌های خاص را با نگاه کردن به دایره تمرین کن، نه صرفاً حفظ کردن.
- مرحله ۳: هر روز ۳ تا ۵ سؤال کوتاه بزن؛ کیفیت مهم‌تر از تعداد است.
- مرحله ۴: هر سؤال غلط را در یک دفترچه کوچک ثبت کن: «اشتباه من از ربع بود یا از جدول؟»

جزوه آموزش دایره مثلثاتی

۷) یک برنامه سبک برای مرور این مبحث

روز دوم

- مرور ربع‌ها و علامت‌ها
- تمرین زاویه مرجع برای ۶ زاویه مختلف
- حل ۳ سؤال تشریحی

روز اول

- مرور مفهوم دایره مثلثاتی و مختصات نقطه‌ها
- یادگیری زاویه‌های 0، 30، 45، 60، 90
- حل ۴ سؤال کوتاه

روز چهارم

- یک آزمون ۱۵ دقیقه‌ای از خودت بگیر
- پاسخ‌ها را تحلیل کن
- فقط اشتباه‌ها را دوباره بخوان

روز سوم

- حل چند معادله ساده سینوسی و کسینوسی
- مرور تست‌های کنکوری این جزوه
- ثبت اشتباه‌های پرتکرار

یادداشت من

چک‌لیست تسلط

- می‌توانم مختصات زاویه‌های معروف را بنویسم.
- می‌توانم علامت سینوس، کسینوس و تانژانت را در هر ربع تعیین کنم.
- می‌توانم زاویه مرجع را به‌درستی پیدا کنم.
- می‌توانم معادله‌های ساده مثلثاتی را در یک بازه حل کنم.
- می‌توانم یک تست کوتاه را بدون ترس و با روش حل کنم.

حرف آخر: دایره مثلثاتی بیشتر از آنکه حفظی باشد، **شکلی و منطقی** است. اگر هر بار شکل را ببینی و بعد سراغ فرمول بروی، هم سریع‌تر یاد می‌گیری و

هم در امتحان کمتر اشتباه می‌کنی.
جزوه آموزش دایره مثلثاتی